

Calculadoras paso a paso de Ecuaciones Diferenciales. Una propuesta con Gamificación

Differential Equations step by step calculators. A proposal with gamification

Miguel Ángel Hurtado Benavides
mangelhb@unimonserrate.edu.co
Fundación Universitaria Monserrate-Unimonserrate
DOI: 10.29151/reit.n4a4

Resumen

Este escrito muestra la implementación de la gamificación como estrategia para la enseñanza de los métodos de solución de las ecuaciones diferenciales a través de la construcción de calculadoras paso a paso de dichos métodos mediante el lenguaje de programación simbólico de Python, lo cual supone una alternativa para la enseñanza y aprendizaje los mencionados objetos matemáticos, aprovechando el interés por la programación de aplicativos que tienen los estudiantes de las ingenierías de la Fundación Universitaria Monserrate Unimonserate.

Palabras claves: ecuación diferencial, calculadoras, gamificación.

Abstract

This paper shows the implementation of gamification as a strategy for teaching the methods of solving differential equations by building step-by-step calculators of these methods using the symbolic programming language of Python, which is an alternative for teaching and learning the aforementioned mathematical objects, taking advantage of the interest in the programming of applications that the students have, from the engineering of the Monserrate University Foundation.

Key word: differential equation, calculators, gamification.

Introducción

La formación matemática del ingeniero es importante por su aplicabilidad donde se requiera cálculos matemáticos para dar solución a problemas que surgen en la ciencia o en la industria, como por ejemplo en: física, química, biología, ciencia de datos, seguridad, mercadeo, medicina, educación, en los sistemas tecnológicos como en la creación de software y en la industria. El ingeniero debe desarrollar su pensamiento matemático para llegar a alguna solución exitosa a un problema planteado, de naturaleza teórica o de aplicación de las matemáticas. También, se requieren competencias en la formación y desarrollo de un profesional de ingeniería cada vez más integradoras, que sea un estudioso de forma autónoma, ser colaborativo, creativo, proactivo, que trabaje en equipo, que muestre valores como la honestidad y la responsabilidad.

Para García (2013) una de las dificultades de la enseñanza y aprendizaje del cálculo para ingeniería, radica en que es descontextualizada con respecto al ejercicio propio de la aplicación de las matemáticas para resolver situaciones problema que surgen en la ingeniería, con el fin de optimizar los recursos puestos en la escena de trabajo de la misma.

En consecuencia, para Plaza (2016) es importante el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería para el modelamiento de fenómenos que se encuentran inmersos en las diversas áreas del conocimiento, por tal razón se tiene una excusa para adelantar el estudio de las matemáticas y una forma de solucionar las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de las mismas. En particular, una ecuación diferencial no es más que una ecuación que contiene una o más derivadas o diferenciales para modelar algún fenómeno que aparece en las ciencias o en la industria, es decir que, la teoría de las ecuaciones diferenciales ofrece métodos que permiten hallar soluciones a las incógnitas de tales ecuaciones, así de este modo, se deben desarrollar en un ingeniero las competencias para tales fines y hacer posible de alguna manera la aplicabilidad en las ciencias y la industria, anteriormente evocadas.

Por otro lado, según la experiencia de Jurado y Fellman (2019) los ingenieros del siglo XXI han nacido en un tiempo de digitalización, donde surgieron avances de dispositivos electrónicos y mecánicos hasta la tecnología digital que se tiene hasta la fecha. Por ejemplo, aparecieron los ordenadores, el Internet y las Tecnologías de la Información y Comunicación, con lo cual se crearon hábitos de trabajo y de estudio mediados por este tipo de tecnologías. De allí surge en esta población, por un lado, el interés, el gusto y la necesidad de aprender más sobre el funcionamiento de los mencionados aparatos, mediante el código de un software de programación o un software de aplicación, pero por otro lado, se destaca el uso de calculadoras paso a paso alojadas en internet, por parte del estudiante de ingeniería, para evitar la operatividad matemática que surge de los problemas o ejercicios propuestos en el aula de clases. Esto ha provocado

en los estudiantes un abandono de la práctica de aplicar propiedades matemáticas en la resolución de problemas. De la anterior discusión surge la pregunta problema: ¿Es posible, por parte de los estudiantes de Ingeniería de la Unimonserate, construir calculadoras paso a paso de ecuaciones diferenciales, mediante código de programación simbólico de Python, para el aprendizaje de la teoría de solución de dichas ecuaciones?

Lo anterior supone un reto para los docentes de matemáticas; en particular, Hurtado (2018) menciona que la realización de aplicativos implica una reflexión docente constante y cíclica, siempre pensando en la mejora de estos productos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para dar una respuesta a la pregunta problema, se propone como objetivo de este escrito “mostrar una forma de construir calculadoras paso a paso de ecuaciones diferenciales mediante código de programación simbólico de Python, con los estudiantes de Ingeniería de la Unimonserate”. La justificación de este ejercicio surge del interés que tienen los estudiantes de aplicar la programación a situaciones que aparecen en su entorno laboral, lo cual se puede aprovechar para la enseñanza y el aprendizaje de la teoría y para aplicaciones de las ecuaciones diferenciales mediante la construcción de las mencionadas calculadoras.

El documento está separado en tres secciones: la estrategia, la metodología y la implementación. En la primera sección se describe la estrategia de gamificación, la cual ha sido adoptada por la Unimonserate, con lo que se pretende incentivar la motivación del estudiante por el aprendizaje de la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, mediante elementos del juego. En la segunda sección se presenta la implementación de la estrategia mencionada, donde los estudiantes se convierten en jugadores y el docente en juez, que tiene como dispositivo de juego cuadernos de Google Colab (2020) para construir calculadoras paso a paso de ecuaciones diferenciales de donde aparecen los resultados para su posterior estudio. En la tercera sección se expone la metodología de estudio, por parte del docente, y de los resultados obtenidos por los estudiantes, con los cuales se evidencia la comprensión de los métodos de solución de ecuaciones diferenciales.

2. Materiales y Métodos

2.1. Estrategia

Según Vásquez (2021), la gamificación es una estrategia entendida por el uso de elementos del juego en entornos no lúdicos. Esta estrategia ha mostrado en muchas situaciones ser motivante en la realización de algunas tareas o actividades educativas, laborales o comerciales. Algunos elementos de juego que se mencionan y se implementan en las actividades para cumplir con el objetivo descrito anteriormente son:

Mecánica de juego: Asumir el reto de llevar a lenguaje de programación de Python los métodos de solución, paso a paso, de una ecuación diferencial, en lo posible, con las diferentes formas de representación de la misma. Cada método de solución de una ecuación diferencial, es un nivel.

Dinámica de juego: realizar las diferentes acciones tales como consultar, explorar, reflexionar, conjeturar, justificar, deducir, inducir y generalizar el paso de llevar a código de programación de Python, los algoritmos matemáticos que se proponen en el área de ecuaciones diferenciales y sus diferentes formas de representaciones.

La estética de juego: mostrar los componentes de logros obtenidos tales como argumentar, demostrar y comunicar la construcción de calculadoras paso a paso de ecuaciones diferenciales mediante el lenguaje de programación simbólico de Python, junto con sus diferentes formas de representaciones.

El dispositivo tecnológico de juego: cuadernos de Google Colaboratory, para trabajo colaborativo, entre equipos de máximo tres jugadores (estudiantes, compañeros), donde se puede interactuar con las herramientas de uso libre de la web y con un entorno matemático con código de programación simbólico de Python.

Tipos de jugador: corresponden a las diferentes acciones o roles de la dinámica de juego, donde los jugadores escogen según sus habilidades y competencias.

El juez del juego (docente): se encarga de dar la teoría de la clase de ecuaciones diferenciales y la interfaz de los cuadernos Colaboratory junto con el código de programación simbólico de Python.

Los logros de juego: se entregan al final de cada sesión de clase de ecuaciones diferenciales, según la evaluación del juez (docente), es quien da un puntaje entre uno y cinco, por la estética del juego. Si el puntaje es mayor o igual a tres, el equipo pasa al siguiente nivel de clase de ecuaciones diferenciales, de lo contrario, el equipo debe superar dicho nivel, al cual el juez no da un puntaje mayor a cuatro.

Los jugadores pueden proponer otros elementos de juego como roles, tiempos, tecnologías o instrumentos, de tal forma que no se pierda la motivación y el aprendizaje de las diferentes formas de representación de la solución de una ecuación diferencial.

2.2. Implementación de la estrategia

En este apartado se muestran algunos ejercicios presentados por los jugadores después de asumir el reto propuesto en la “Mecánica del juego” por parte del juez.

Nivel 1. Ecuación diferencial ordinaria de primer orden de variables separables

La ecuación diferencial ordinaria de primer orden tiene la forma:

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

Donde $P(x)$ y $Q(y)$ son funciones de primer orden en las variables x y y respectivamente.

Solución: para solucionar esta ecuación diferencial se debe seguir los siguientes pasos:

- ✓ Transponer los términos de una variable a cada lado de la ecuación.

$$P(x)dx = -Q(y)dy$$

- ✓ Integrar a cada uno de los términos de la ecuación

$$\int P(x)dx = \int -Q(y)dy + C$$

- ✓ Despejar la variable y y de ser posible.

¡Ahora es el turno de los jugadores!

Los jugadores siguen las dinámicas del juego ya descritas anteriormente. Se empieza con la presentación de la mecánica de juego, seguido de un reconocimiento del dispositivo tecnológico de juego, los cuadernos de Google Colab (2020), donde los jugadores pueden alojar e interactuar con las herramientas expuestas de libre uso de la web, para que exploren, compartan, observen y hagan sus propios entornos y programas a partir de la teoría expuesta, en particular. Para llevar a código el paso a paso de los métodos de solución de las

ecuaciones diferenciales, se sigue el tutorial sobre lenguaje de programación simbólico para matemáticas de Sympy (2020).

El reconocimiento del dispositivo tecnológico de juego, fue una dificultad para la mayoría de jugadores, por lo cual, los mismos proponen que el juez haga una demostración del uso de dicha herramienta. El juez acepta la propuesta de los jugadores, no sin antes, mencionar como una falta de estética del juego, por lo que sentencia como puntaje máximo del juego en el nivel uno en un valor de cuatro.

El juez explica la forma de jugar con el dispositivo, teniendo en cuenta que los jugadores tienen conocimientos básicos de programación, como el uso de librerías, en este caso de Sympy; las variables simbólicas que se deben declarar al comienzo del programa como lo son la variable independiente “x”, el símbolo para la constante de integración “C_1”, el símbolo de una función “P(x)”, el valor numérico de “e”, y todos los que se requieran, además, los jugadores ya conocen la lógica de programación básica con variables, la aplicación del condicional if, else, los ciclos for, while, la construcción de funciones, solo queda por explicar los códigos para la escritura simbólica matemática. En la siguiente lista se muestran algunos ejemplos de la correspondencia entre código y la impresión simbólica matemática que arroja el programa:

Código	←	Símbolo
$x^{**5}/2$	←	$\frac{x^5}{2}$
e^{**5}	←	e^5
$P(x)$	←	$P(x)$
$\log \log (x^{**5})$	←	$\log \log (x^5)$
$Derivate(\sin \sin (x^{**2}) + 3 * x^{**2})$	←	$\frac{d}{dx}(\sin \sin (x^2) + 3x^2)$
$Integral(\sin \sin (x^{**2}) + 3 * x^{**2})$	←	$\int (\sin \sin (x^2) + 3x^2) dx$
$Eq(P(x), \sin \sin (x^{**2}) + 3 * x^{**2})$	←	$P(x) = \sin \sin (x^2) + 3x^2$

Tabla 1. Códigos y símbolos. Elaboración propia.

También se tiene correspondencia entre operaciones matemáticas y operaciones de funciones de Sympy:

Código de operación	←	Resultado
Propiedades de la potenciación $x^{**3} * x^{**5}/x^{**4}$	←	x^4
Propiedad de logaritmación $\log \log (e^{**5})$	←	5
Derivada de una función $\text{diff}(3 * x^{**2} + \sin \sin (x))$	←	$6x + \cos \cos (x)$
Integral de una función $\text{integrate}(6 * x + \cos \cos (x))$	←	$3x^2 + \sin \sin (x)$
Solución de ecuaciones $\text{solve}(\text{Eq}(x^{**2} + 2 * x + 1,0))$	←	1

Tabla 2. Códigos y resultados. Elaboración propia.

Como se puede observar en las anteriores tablas, la forma de escritura en código es muy semejante a la impresión que arroja el programa del mismo. Por tanto, la implementación del dispositivo tecnológico es muy familiar para los jugadores. Para solucionar alguna duda, el jugador puede seguir las indicaciones del tutorial de la página de Sympy. Ahora sí, los jugadores tienen las instrucciones para empezar a implementar el dispositivo tecnológico de juego para construir la primera calculadora paso a paso de ecuaciones diferenciales de variable separable de primer orden.

Metodología

La metodología usada es la de observación cualitativa, se recogen los resultados de juego y las experiencias de los jugadores, durante todo el proceso. Se tiene en cuenta: el interés por la mecánica del juego, la motivación por seguir la dinámica de cada una de sus acciones como la organización de los roles en cada grupo de jugadores; la estética del juego, como el funcionamiento y la comunicación de los logros. También se tiene en cuenta la iniciativa, la creatividad y las propuestas para dar un buen resultado.

Resultados

Los jugadores empezaron el programa con la declaración de la librería SymPy y el código de entradas de variables; luego, declaran una función denominada separable con cuatro entradas, donde el usuario ingresa en la primera entrada el lado izquierdo de la ecuación diferencial; en la segunda entrada, el lado derecho, en la tercera y cuarta entrada escribe las condiciones iniciales $f(x), x$, correspondientemente. Con estos valores empiezan a construir el código para formar la ecuación diferencial, primero para la solución general y luego la solución particular. Por último, realizan las gráficas de la ecuación diferencial y de su solución.

Una parte del código comentado línea por línea, realizado por los jugadores es el siguiente:

```
from sympy import *      # Importación de la librería sympy
x, C1= symbols("x C_1") # Símbolos de variable independiente y constante
P = Function('P')       # Símbolo de variable dependiente
e = exp(1)              # Valor del número e
```

```
print("Ecuación diferencial de variable separable")

# Lado izquierdo de la ecuación diferencial
Li = e**P(x)*Derivative(P(x))

# Lado derecho de la ecuación diferencial
Ld = expand(L.d)
Ecuacion1 = Eq(Li,Ld) # Función que forma la ecuación
display(Ecuacion1)   # impresión de la ecuación diferencial
print()              # salto de línea

print("integrando se tiene la solución general")
Ecuacion0 = Eq(Integral(Li,x),Integral(L.d,x)) # Representación integral
Ecuacion2 = Eq(integrate(Li,x),integrate(L.d,x)+C1) # función integración
```

```
display(Ecuacion0) # impresión de la integral
print()
display(Ecuacion2) # impresión de la solución general
print()
```

El resultado completo del código de programación se encuentra alojado en el siguiente enlace: [Calculadora_Ecuación_Diferencial_Separable](#)

En esta parte de la implementación del dispositivo de juego por parte de los jugadores, aparecen los procesos de aprendizaje. Según Duval (2006), esto está relacionado con la transformación o conversión de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos involucrados; son procesos cognitivos con los cuales se evidencia un nivel de comprensión del objeto en estudio. En el caso particular de la solución de una ecuación diferencial, que está representada mediante símbolos algebraicos, el juez puede tomar como evidencia de aprendizaje o de comprensión de dicha solución, por parte de los jugadores, la conversión a la representación equivalente a código de programación.

Después de construir la calculadora de ecuaciones diferenciales de primer orden de variable separable, los jugadores fueron mejorando a medida que construían calculadoras de ecuaciones diferenciales para ecuaciones diferenciales homogéneas, exactas, lineales y demás. En el siguiente enlace se encuentra la calculadora paso a paso de ecuaciones diferenciales lineales construida por un grupo de jugadores:

[Calculadora_Ecuación_Diferencial_Lineal](#)

4. Discusión

Para Hurtado (2018), la realización de aplicativos es una forma de reflexión docente, es por ello que, aquí los jugadores y el juez analizan los programas realizados para identificar problemas técnicos y conceptuales en los prototipos de calculadoras paso a paso de ecuaciones diferenciales presentados por los jugadores y recomendar los cambios necesarios para nuevas ejecuciones. En este punto, el juez evalúa lo aprendido por parte de los jugadores, además, los programas realizados y presentados permiten implementar soluciones que buscan mejorar la calidad operativa y estratégica, tanto en los sistemas de producción como educativo.

5. Conclusiones

La implementación de la gamificación tiene un efecto de motivación constante, mejorando los procesos educativos. Esta experiencia supone que el uso de la gamificación en la enseñanza de las matemáticas para la ingeniería contribuye al desarrollo de competencias en la misma y que se requieren para la industria de la tecnología. Además, esta estrategia basada en la realización de calculadoras paso a paso de ecuaciones diferenciales con el lenguaje de programación simbólico de Python, supone nuevas formas de impartir las clases en el aula de esta materia. Los mismos jugadores destacan la integración de las matemáticas y la programación para la creación de nuevas formas de aprender la mencionada asignatura y comprender su aplicabilidad.

Referencias

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168. <https://cmapspublic.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9R-GZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf>

Google Colab (2020). *Cuadernos de edición de código en entorno portátil*. <https://isolution.pro/es/t/google-colab?alias=tutorial-de-google-colab>

García Retana, J. A. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, 37(1), 29-42. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=44028564002>

Hurtado, M. A. (2018). *La realización de aplicativos con Scratch como una forma de reflexión docente*. Memorias del quinto Encuentro Distrital de Educación Matemática. 133-1. <http://funes.uniandes.edu.co/14380/>

Jurado, M., y Fellman, H. (2019). Digitalización de la educación en ingeniería: del aprendizaje con base tecnológica a la educación inteligente. *Educación Superior*, 6(1), 39-50. http://www.scielo.org.bo/scielo.php?pid=S2518-82832019000100009&script=sci_arttext

Plaza Gálvez, L. F. (2016). Modelación matemática en ingeniería. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 7(13), 47-57. https://www.researchgate.net/publication/346410146_Modelacion_matematica_en_ingenieria

Nelson, M. J., y Hoover, A. K. (2020). Notes on using Google Collaboratory in AI education. En M. Giannakos, G. Sindre (Eds.), *Proceedings of the 2020 ACM conference on innovation and Technology in Computer Science Education* (pp. 533-534). ACM Digital Library. https://www.kmjn.org/publications/ColabEducation_ITiCSE20.pdf.

Sympy. (2020). *Lenguaje de programación simbólico para matemáticas*. Isolution. <https://isolution.pro/es/t/sympy?alias=tutorial-de-sympy>

Vásquez, J. (2021). Gamificación en educación: una revisión del estado actual de la disciplina. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela*, 7(1), 117-139. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8293878>